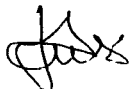


**EQUILÍBRIO DE TRÁFEGO SOB DUAS ABORDAGENS:
COMPLEMENTARIDADE E OTIMIZAÇÃO**

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Srta. Regina Célia de Oliveira e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 10 de novembro de 1989.



**Prof. Dr. José Antonio Scaramucci
(Orientador)**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada.

OL4e

11663/BC

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

**EQUILÍBRIO DE TRÁFEGO SOB DUAS ABORDAGENS:
COMPLEMENTARIDADE E OTIMIZAÇÃO**

REGINA CÉLIA DE OLIVEIRA

AGRADECIMENTOS

A José Antonio Scaramucci, pela preciosa orientação nesta dissertação.

Ao CNPq e à UNICAMP pelo sustento financeiro que tornou possível a realização deste trabalho.

A Petrônio Pulino, pelo incentivo, pela amizade sincera e pela maravilhosa cooperação especialmente quanto à implementação.

A Clóvis Perin Filho, que nunca negou sua colaboração quando solicitado e que, apesar de tantos compromissos, sempre encontrou tempo para me atender e oferecer valiosas sugestões.

A Jurandir Zullo Jr, pela sua disponibilidade e pela preciosa colaboração em todas as fases deste trabalho.

A Orlando Bordoni, pela substancial ajuda durante a fase de implementação.

A Jurandir Fernandes, pelo interesse demonstrado pelo trabalho e pelas sugestões oferecidas.

A Alberto Martins, Ronaldo Passini, Tadeu Fernandes de Carvalho e Antonio Spanó Jr, que sempre me incentivaram e nunca me deixaram desistir de meus objetivos.

A Thomas Rutherford, que gentilmente cedeu seu pacote

computacional (MILES), o que facilitou sensivelmente nosso trabalho.

A todos aqueles que fizeram de minha estada na Unicamp, um período feliz de minha vida, em especial Socorro, Denise, Roseli e Edivaldo.

A todos o meu Muito Obrigado!

Regina Célia

*À Izabel, minha avó e
à Carolina, minha sobrinha.*

CONTEÚDO

0 – INTRODUÇÃO	1
I – O PROBLEMA DE EQUILÍBRIO DE TRÁFEGO	
1.1 – EM QUE CONSISTE UM EQUILÍBRIO DE TRÁFEGO?	4
II – EQUILÍBRIO DE TRÁFEGO POR COMPLEMENTARIDADE	
2.1 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	9
2.2 – EQUIVALÊNCIA COM UM PROBLEMA DE COMPLEMENTARIDADE NÃO-LINEAR	12
2.3 – TEOREMAS DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO	15
2.4 – O MÉTODO DE SOLUÇÃO	16
2.5 – O ALGORITMO	19
2.6 – ASPECTOS COMPUTACIONAIS	19
2.7 – OUTRAS FORMULAÇÕES	21
III – EQUILÍBRIO DE TRÁFEGO POR OTIMIZAÇÃO	
3.1 – EQUIVALÊNCIA ENTRE UM PROBLEMA DE EQUILÍBRIO DE TRÁFEGO E UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	24

3.2 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	27
3.3 – O ALGORITMO	28
3.4 – ASPECTOS COMPUTACIONAIS	29
 IV – RESULTADOS COMPUTACIONAIS	
4.1 – TESTES COMPUTACIONAIS	32
 V – EXTENSÕES E CONCLUSÕES	
5.1 – O PARADOXO DE BRAESS	49
5.2 – CONCLUSÕES FINAIS	53
 APÊNDICES	55
REFERÊNCIAS	63

CAPÍTULO 0

INTRODUÇÃO

Esta dissertação versa sobre o problema de equilíbrio de tráfego.

O sistema viário de muitas cidades, principalmente as de maior porte, está superado há muito tempo. Isto tem causado congestionamentos insuportáveis. A cidade de São Paulo é um bom exemplo disto, estando seu trânsito à beira de um colapso:

“Se toda a frota de veículos da cidade (que é algo em torno de 25% da frota nacional) ocupasse ao mesmo tempo o sistema viário principal da cidade (todas as grandes avenidas), os carros, em 1960, encostados pára-choque com pára-choque, ocupariam todas as faixas. Dez anos mais tarde, o mesmo aconteceria, mas com pilhas de dois carros. Em 1980, as pilhas seriam de quatro carros. E por projeção, em 1990 as pilhas atingiriam oito automóveis” [31].

O nosso objetivo ao realizar este trabalho não é o de dar uma solução definitiva para o problema, mas fornecer aos engenheiros e analistas de trânsito uma ferramenta a mais para

a dura tarefa de resolver os problemas de trânsito.

A preocupação gerada por problemas de tráfego criou condições para que pesquisas nascessem trazendo abordagens as mais diversas.

Já em 1952, Wardrop [41] publicava trabalhos sobre o assunto. Dada a relevância e o caráter seminal de sua contribuição, o problema que estudamos aqui passou a ser chamado de equilíbrio de Wardrop.

Beckmann [4], em 1956, mostrou que sobre certas condições, o problema de equilíbrio é equivalente a um problema de otimização [39]. Porém, Beckmann tratou o caso simples em que os custos nos arcos dependem apenas de fluxos locais, mesmo reconhecendo que apenas alguns casos especiais satisfaziam as condições requeridas [28].

Dafermos [4] estendeu consideravelmente a estrutura original de Beckmann, considerando o custo nos arcos como uma função dos fluxos ocorrendo em toda a rede. Isto torna-se particularmente importante quando trabalhamos com redes contendo ruas de duplo sentido, ou quando o tempo de viagem em um arco depende crucialmente da espera que ocorre nas intersecções.

Smith [39], Dafermos [6] e outros apresentaram e resolveram o problema usando desigualdade variacional. Asmuth [3] também formulou o problema desta maneira, propondo

o uso do algoritmo de ponto fixo de Eaves-Saigal para sua solução [33].

Aashtiani e Magnanti [1] apresentaram a parte teórica do problema trabalhando com complementaridade. Não se tem conhecimento, no entanto, de trabalhos computacionais usando algoritmos específicos para complementaridade não-linear.

No Capítulo I deste trabalho, daremos uma descrição detalhada do problema. Apresentaremos, no Capítulo II, a formulação do problema por complementaridade. Também serão apresentados teoremas que garantem a existência e unicidade de solução. No Capítulo III, faremos a abordagem por otimização. Uma demonstração de equivalência entre os métodos também será feita. No Capítulo IV, apresentaremos resultados computacionais, faremos uma análise entre os métodos e daremos algumas conclusões. E finalmente, no Capítulo V, as extensões, (onde apresentaremos o paradoxo de Braess) e as conclusões finais serão apresentadas.

CAPÍTULO I

O PROBLEMA DE EQUILÍBRIO DE TRÁFEGO

1.1 – EM QUE CONSISTE UM EQUILÍBRIO DE TRÁFEGO?

Vamos supor que em uma determinada cidade, o departamento de tráfego resolve, por algum motivo, impor aos condutores de veículos as rotas que estes devem tomar para chegar ao seu destino, de acordo com certos critérios que julga serem bons para a comunidade.

Seja a rede de transporte como na Figura 1, onde os nós representam os pontos de origem-destino (O-D, por simplicidade) ou as intersecções de ruas e os arcos representam as ruas. Nos referimos ao j -ésimo caminho do i -ésimo par O-D como o caminho j^i , ao fluxo neste caminho como F_j^i e ao custo unitário correspondente como $C_j^i(F)$. As demandas no i -ésimo par O-D são denotadas por d_i . Com relação aos arcos, nos referimos ao k -ésimo arco da rede como arco k , ao fluxo neste arco como f_k e ao custo unitário correspondente como $c_k(f)$. Vamos considerar o par (1,2) como o primeiro par O-D e o par (2,1) como o segundo par O-D.

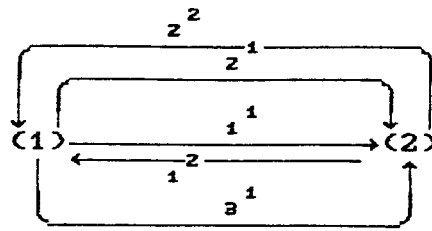


Figura 1

Vamos estabelecer os custos unitários nos caminhos:

$$C(F) = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} 1000 \\ 950 \\ 3000 \\ 1000 \\ 1300 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

onde o vetor F contém em suas primeiras componentes os fluxos relativos ao primeiro par O-D, a seguir os fluxos relativos ao segundo par O-D e assim sucessivamente.

Vamos supor que as demandas entre os pares O-D (1,2) e (2,1) são $d_1 = 210$ e $d_2 = 120$, respectivamente. Supondo que o departamento de tráfego exige que o custo total deve ser minimizado, precisamos resolver o seguinte problema:¹

¹ Sendo os C_j^i como em (1.1)

$$\text{Min } \sum_i \sum_j C_j^i(F) F_j^i$$

s.a.

$$\sum_j F_j^i = d_i$$

$$F_j^i \geq 0$$

onde $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$

A solução para este problema é:

$$F_1^1 = 111.57 \qquad C_1^1 = 2449.35$$

$$F_2^1 = 80.96 \qquad C_2^1 = 2430.83$$

$$F_3^1 = 17.46 \qquad C_3^1 = 3349.26$$

$$F_1^2 = 66.72 \qquad C_1^2 = 2557.53$$

$$F_2^2 = 53.28 \qquad C_2^2 = 2712.98$$

O custo total é 843765.56.

É claro que o departamento de tráfego partiu do princípio que cada condutor iria aprovar a sua política e segui-la irrestritamente. Mas um condutor bem informado das condições de tráfego nas outras vias pode descobrir que há caminhos mais baratos para se chegar ao mesmo destino.

Por exemplo, se um condutor que trafegava no caminho 3¹, toma o caminho 2¹, a nova distribuição e os custos correspondentes serão como segue:²

² Supondo que os demais permanecem fiéis às determinações do departamento de tráfego.

$$F_2^1 = 81.96$$

$$F_3^1 = 16.46$$

$$C_2^1 = 2445.83$$

$$C_3^1 = 3329.20$$

$$C_2^2 = 2713.98$$

Observamos aqui que o custo no caminho 3^1 diminuiu, enquanto que os custos nos caminhos 2^1 e 2^2 aumentaram e que este condutor foi beneficiado com a troca que fez.

Um outro condutor que tomava o caminho 2^2 observa que se tomar o caminho 2^1 provocará a seguinte alteração:

$$F_2^2 = 52.28$$

$$F_1^2 = 67.72$$

$$C_2^2 = 2688.98$$

$$C_1^2 = 2577.53$$

$$C_1^1 = 2454.30$$

$$C_2^1 = 2440.80$$

Esta nova troca fez os custos nos caminhos 2^2 e 2^1 diminuírem, enquanto os custos nos caminhos 1^2 e 1^1 aumentaram.

Este processo segue até que nenhum condutor tenha incentivo para mudar de rota, ou seja qualquer troca resulta numa rota mais cara. No final deste processo a solução será:

$$F_1^1 = 120$$

$$C_1^1 = 2550$$

$$F_2^1 = 90$$

$$C_2^1 = 2550$$

$$F_3^1 = 0$$

$$C_3^1 = 3000$$

$$F_1^2 = 70$$

$$C_1^2 = 2640$$

$$F_2^2 = 50$$

$$C_2^2 = 2640$$

Com esta solução obtemos o custo total de 852300.

Como se vê, a melhor solução coletiva nem sempre é a melhor solução individual e se cada usuário do sistema de tráfego age individualmente, o ótimo coletivo nem sempre é estável. Pela teoria econômica, diríamos que pode ocorrer uma falha de mercado.

CAPÍTULO II

EQUILÍBRIO DE TRÁFEGO POR COMPLEMENTARIDADE

2.1 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Agora estamos prontos para enunciar a lei de equilíbrio de Wardrop, a saber:

“Num equilíbrio, para cada par origem-destino, o custo de viagem em todas as rotas usadas é igual e este custo é menor ou igual ao custo de viagem das rotas não-usadas”.

Em outras palavras:

Se a distribuição está em equilíbrio, então:

(i) se uma rota apresenta fluxo positivo, então ela possui o menor custo possível; (ii) se uma rota possui custo superior ao custo de qualquer outra rota, então seu fluxo será zero.

Em notação matemática, o modelo de equilíbrio é definido numa rede de transporte $[N,K]$ com N nós, K arcos dirigidos e um conjunto I de pares de nós origem-destino (O-D).

O modelo é formulado da seguinte forma:

$$\left[C_j^i(F) - u_i \right] F_j^i = 0 \quad j \in J^i, i \in I \quad (2.1.a)$$

$$C_j^i(F) - u_i \geq 0 \quad j \in J^i, i \in I \quad (2.1.b)$$

$$\sum_{j \in J^i} F_j^i - d_i(u) = 0 \quad i \in I \quad (2.1.c) \quad (2.1)$$

$$F \geq 0 \quad (2.1.d)$$

$$u \geq 0 \quad (2.1.e)$$

Nesta formulação:

I – conjunto de pares O-D.

J^i – conjunto de caminhos disponíveis para o i -ésimo par O-D.

F_j^i – fluxo no j -ésimo caminho do i -ésimo par O-D.

F – vetor de (F_j^i) com dimensão $n_1 = \sum_i |J^i|$ = número total de caminhos.

u_i – custo mínimo para o i -ésimo par O-D.

u – vetor de (u_i) com dimensão $n_2 = |I|$ = número total de pares O-D.

$d_i(u)$ – função demanda para o i -ésimo par O-D.

$$d_i(u): \mathbb{R}_+^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}_+^1$$

C_j^i – função custo para o j -ésimo caminho do i -ésimo par O-D.

$$C_j^i(F): \mathbb{R}_+^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}_+^1$$

A função custo pode, a princípio, incorporar uma variedade de atributos que são relevantes para a escolha da rota tal como tempo de viagem, custo de viagem, condições ou

atratividade da rota. Não se tem notícia no entanto, de provas de existência de equilíbrio incorporando tais características.

Seja $J = \{J^i, i \in I\}$ denotando o conjunto de todos os caminhos disponíveis na rede e assumimos que a rede é fortemente conectada, isto é, para todo par O-D, há pelo menos um caminho ligando a origem ao destino (i. e. $|J^i| \geq 1$).

As equações 2.1.a e 2.1.b no modelo de equilíbrio de Wardrop requerem que, para qualquer par O-D, o custo de viagem em todos os caminhos $j \in J^i$ com fluxo positivo seja o mesmo e igual a u_i , que é menor ou igual ao custo de viagem em qualquer caminho com fluxo zero. A equação 2.1.c requer que a soma dos fluxos ao longo de diferentes caminhos entre qualquer par O-D seja igual a demanda total $d_i(u)$. E finalmente as condições 2.1.d e 2.1.e declaram que o fluxo nos caminhos e o custo mínimo devem ser não-negativos.

Como caso especial do problema de equilíbrio (2.1), temos o modelo aditivo no qual:

$$C_j^i(f) = \sum_{k \in K} \delta_{kj}^i c_k(f) \quad j \in J^i, i \in I$$

onde:

$$\delta_{kj}^i = \begin{cases} 1 & \text{(arco } k \text{ no caminho } j) \\ 0 & \text{(caso contrário)} \end{cases}$$

dimensão de $K = na$

e c_k é a função custo para o arco k

$$c_k(f): \mathbb{R}_+^{na} \rightarrow \mathbb{R}_+^1$$

Ou seja, o custo de viagem no caminho j é a soma dos custos dos arcos que compõem este caminho.

Mais compactamente:

$C_j^i(F) = \Delta^i{}^T c(f)$, onde $\Delta^i = (\delta_{kj}^i)$ é a matriz de incidência arco-caminho para o i -ésimo par O-D da rede.

2.2 - EQUIVALÊNCIA COM UM PROBLEMA DE COMPLEMENTARIDADE NÃO-LINEAR

Seja $G: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$G(x) = (G_1(x), \dots, G_n(x))$$

O problema de complementaridade não-linear é encontrar um vetor x satisfazendo:

$$x \geq 0, G(x) \geq 0 \text{ e } x \cdot G(x) = 0$$

Vamos mostrar que o problema de equilíbrio de tráfego (2.1) pode ser escrito como um problema de complementaridade não-linear.

Seja $x = [F \ u]^T \in \mathbb{R}^n$, com $n = n_1 + n_2$

e sejam:

$$h_j^i(x) = C_j^i(F) - u_i \quad j \in J^i, i \in I$$

e

$$g_i(x) = \sum_{j \in J^i} F_j^i - d_i(u) \quad i \in I$$

Seja então:

$$G(x) = \begin{bmatrix} h_j^i(x) \\ g_i^i(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Consideremos agora o seguinte sistema de complementaridade não-linear:

$$\begin{aligned} h_j^i(x) F_j^i &= 0 & j \in J^i, i \in I \\ h_j^i(x) &\geq 0 & j \in J^i, i \in I \\ g_i^i(x) u_i &= 0 & i \in I \\ g_i^i(x) &\geq 0 & i \in I \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Observemos que qualquer solução $\bar{x} = [\bar{F} \ \bar{u}]^T$ para o problema de equilíbrio de tráfego (2.1) satisfaz $g_i^i(x) = 0$, $\forall i \in I$, logo esta solução é também solução para o problema de complementaridade não-linear (2.2).

A proposição seguinte estabelece o resultado recíproco.

Proposição 2.2.1:

Suponha, para todo $j \in J^i$, que $C_j^i: \mathbb{R}_+^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}_+^1$ é uma função positiva. Também suponha, para todo $i \in I$, que $d_i^i: \mathbb{R}_+^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}_+^1$ é uma função não-negativa. Então o sistema de equilíbrio de tráfego (2.1) é equivalente ao sistema de complementaridade não-linear (2.2).

Prova

É claro que basta apenas mostrar que qualquer solução de (2.2) é também solução de (2.1). Suponha o contrário: que há um $x = [F \ u]^T$ satisfazendo (2.2), mas que não satisfaz (2.1) ou

seja que $g_i(x) = \sum_{j \in J^i} F_j^i - d_i(u) > 0$, para algum $i \in I$.

Então $g_i(x) \cdot u_i = 0$, implica $u_i = 0$. Como d_i é não-negativa então $\sum_j F_j^i > d_i(u) \geq 0$, o que implica que $F_j^i > 0$ para algum $j \in J^i$ e algum $i \in I$. Mas para estes j e i particulares, a equação $h_j^i(x) \cdot F_j^i = 0$ implica que $h_j^i(x) = C_j^i(F) - u_i = 0$ ou $C_j^i(F) = u_i$.

Como $u_i = 0$, então $C_j^i(F) = 0$, contradizendo a hipótese que $C_j^i(F) > 0$.

Logo, toda solução de (2.2) é também solução de (2.1), ou seja o problema de equilíbrio de tráfego é equivalente ao problema de complementaridade não-linear.³ ■

Com relação ao modelo aditivo onde:

$$C_j^i(F) = \sum_{k \in K} \delta_{kj}^i c_k(f), \quad C_j^i(F) \text{ é positiva se as funções custo}$$

nos arcos são não-negativas e pelo menos uma é positiva num arco k no caminho j .

Proposição 2.2.2:

Suponha, para todo $k \in K$ que $c_k: \mathbb{R}_+^{n^g} \rightarrow \mathbb{R}_+^1$ é uma função positiva. Também suponha, para todo $i \in I$, que $d_i: \mathbb{R}_+^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}_+^1$ é uma função não-negativa. Então o sistema de equilíbrio de tráfego aditivo é equivalente ao sistema de complementaridade

³ As suposições sobre as condições das funções C_j^i e d_i não são restritivas, pois é o que ocorre na prática.

não-linear.

Prova

Se $c_k: \mathbb{R}_+^{n_3} \rightarrow \mathbb{R}_+^1$ é positiva, obviamente $C_j^i(F)$ é positiva e a demonstração segue como a anterior. ■

2.3 – TEOREMAS DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO

Os teoremas que vamos apresentar bem como suas demonstrações encontram-se em Aashtiani e Magnanti [1].

Teorema 2.3.1 (Existência de solução)

Suponha que $[N, K]$ é uma rede fortemente conectada. Suponha que $C_j^i: \mathbb{R}_+^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}_+^1$ é uma função contínua não-negativa para todo $j \in J^i$. Também suponha que, para todo $i \in I$, $d_i: \mathbb{R}_+^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}_+^1$ é uma função contínua que está limitada para cima. Então o sistema de complementaridade não-linear (2.2) tem solução.

Teorema 2.3.2 (Existência de solução para o problema de equilíbrio de tráfego aditivo)

Suponha que $[N, K]$ é uma rede fortemente conectada e que $c_k: \mathbb{R}_+^{n_3} \rightarrow \mathbb{R}_+^1$ é uma função contínua positiva para todo $k \in K$. Também suponha que para todo $i \in I$, $d_i: \mathbb{R}_+^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}_+^1$ é uma função contínua não-negativa que está limitada para cima. Então o problema de equilíbrio de tráfego aditivo tem uma solução.

Teorema 2.3.3 (Unicidade de solução)

Para uma rede fortemente conectada $[N,K]$, suponha que $c_k(f)$, o vetor de funções custo nos arcos, e $-d$, o vetor do negativo das funções demanda são estritamente monótonas. Então o fluxo nos arcos e o custo mínimo para o problema de equilíbrio de tráfego aditivo são únicos e o conjunto de fluxos de equilíbrio é convexo.

Note que este teorema nos garante que o fluxo nos arcos é único. O fluxo nos caminhos não precisa ser único, pois pode existir várias combinações de fluxos nos caminhos que correspondem ao mesmo conjunto de fluxo nos arcos.

2.4 - O MÉTODO DE SOLUÇÃO

Seja $G: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Como falamos no capítulo 2, o problema de complementaridade não-linear é encontrar um vetor x que satisfaz:

$$x \geq 0, G(x) \geq 0 \text{ e } x \cdot G(x) = 0$$

Se G pode ser escrita da forma:

$G(x) = q + Mx$, dizemos que este é um problema de complementaridade linear.

Quando G é não-linear, tomamos, a cada iteração, uma aproximação de G da forma:

$$\tilde{G}(x) = G(\bar{x}) + A(\bar{x})(x - \bar{x})$$

Onde $A(\bar{x})$ é um método de aproximação linear. Incluídos na família de métodos de aproximação linear estão:

(i) O método de Newton no qual a função G é diferenciável e $A(\bar{x}) = \nabla G(\bar{x})$;

(ii) Os métodos Quase-Newton onde $A(\bar{x})$ é uma aproximação de $\nabla G(\bar{x})$;

(iii) Os métodos de super-relaxação sucessiva nos quais $A(\bar{x}) = L(\bar{x})$ (ou $U(\bar{x})$) + $D(\bar{x}) / w^*$, onde w^* é o parâmetro de relaxação tal que $0 < w^* < 2$ e onde $D(\bar{x})$, $L(\bar{x})$ e $U(\bar{x})$ são respectivamente as partes diagonal, triangular inferior e triangular superior de $\nabla G(\bar{x})$;

(iv) O método de Jacobi linearizado, onde $A(\bar{x}) = D(\bar{x})$;

(v) Os métodos de projeção nos quais $A(\bar{x}) = H$, onde H é alguma matriz simétrica definida positiva.

Na resolução por complementaridade usaremos $A(\bar{x})$ tal como em (i) e na resolução por otimização tal como em (iv).

Resolvemos o problema de complementaridade linear usando o algoritmo de pivoteamento quase-complementar de Lemke (que está descrito no apêndice A) e verificamos se a solução deste problema é também solução do problema não-linear. Se isto ocorre, encontramos a solução, se não ocorre fazemos a linearização neste ponto e continuamos até que seja encontrada a solução.

No nosso problema de tráfego, temos:

$$C_j^i(F) - u_i \geq 0 : F_j^i \geq 0 \quad j \in J^i, i \in I$$

$$\sum_{j \in J^i} F_j^i - d_i(u) \geq 0 : u_i \geq 0 \quad i \in I$$

A única parte que é não-linear é $C_j^i(F)$, portanto será a única a ser linearizada. A linearização será feita usando expansão de primeira ordem em série de Taylor ou seja:

$$\tilde{C}_j^i(F) = C_j^i(F^n) + \nabla C_j^i(F^n)(F - F^n)$$

Vamos colocar este problema linearizado na forma:

$$w = Mx + q$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \hline w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla C(F^n) & -e^T \\ \hline I^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ \hline u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C(F^n) - \nabla C(F^n)F^n \\ \hline -d \end{bmatrix}$$

Onde:

I^T é uma matriz diagonal por blocos. Cada bloco (I_i^T) se refere a um par O-D e contém uma quantidade de uns tanto quanto são os caminhos existentes para cada par O-D.

e^T é uma matriz de blocos, onde o i -ésimo bloco contém uma quantidade de vetores unitários e_i^T tanto quantos são os caminhos para o i -ésimo par O-D.

O teorema que garante a convergência da sequência $\{x^k\}$ gerada pelo método de Newton encontra-se no apêndice B.

2.5 - O ALGORITMO

1: - Inicialização

$n = 0$, estipular x^0

2: - Nova iteração

$$\bar{x} = x^n$$

3: - Linearização

$$\tilde{G}(x) = G(\bar{x}) + J(\bar{x})(x - \bar{x})$$

$$q^n = G(\bar{x}) - J(\bar{x})\bar{x}$$

$$M^n = J(\bar{x})$$

4: - Resolução do problema linear

Encontrar x que resolve:

$$w = q^n + M^n x \geq 0, \quad x \geq 0, \quad w.x = 0$$

5: - Teste de parada

$$\text{Se } \begin{cases} x_i \geq -\epsilon \\ G_i(x) \geq -\epsilon \\ |x_i \cdot G_i(x)| < \epsilon \end{cases}, \text{ para } \epsilon \text{ pequeno}$$

x é solução aproximada para o problema não-linear

Se não, $n_1 = n + 1$, $x^{n_1} = x$ e retorna ao passo 2.

2.6 - ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Para a solução deste problema, utilizamos um pacote computacional de implementação de THOMAS RUTHERFORD do

departamento de economia da "University of Western Ontario" do Canadá de outubro/87.

O pacote chamado MILES é uma coleção de subrotinas para resolver problemas de complementaridade linear usando o método de pivotamento quase-complementar de Lemke.

Lusol (do Laboratório de Otimização de Stanford), um conjunto de rotinas para gerar e manter a fatoração da base é o elemento chave do sistema. É feito um "trade-off" na escolha entre refatoração e atualização da base sendo que é possível controlar este balanço através de ajustamento de alguns parâmetros de controle.

Miles é especialmente útil na resolução de problemas grandes e esparsos, pois explora a esparsidade da matriz M recebendo apenas os seus elementos não-nulos. Estes elementos são armazenados por uma subrotina que constrói e mantém uma estrutura de dados do tipo lista ligada a qual é depois transformada numa estrutura de dados em forma de matriz de programação linear do tipo coluna dominante.

Normalmente o método de Lemke é iniciado com as variáveis de folga na base, mas a critério do usuário pode ser fornecida outra base desde que seja complementar. Se o método de Lemke falha ao resolver o problema, o pacote providencia a melhor aproximação observada até aquele momento.

O programa está implementado em linguagem de programação

Fortran 77. Os testes foram realizados em ambiente VAX/VMS versão 4.5. O tempo de CPU (que será apresentado no capítulo 4) foi medido após as entradas de dados.

2.7 – OUTRAS FORMULAÇÕES

Existem outras formulações para o problema. Apresentaremos a seguir algumas delas. A primeira é uma equivalência com um problema de desigualdade variacional.

Definição 2.7.1:

Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$, $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $x \in K$, o problema de complementaridade consiste em encontrar um vetor $x \geq 0$ tal que $G(x) \geq 0$ e $x^T G(x) = 0$.

Definição 2.7.2:

Dado $K \subset \mathbb{R}^n$, não vazio, fechado e convexo e $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, o problema de desigualdade variacional consiste em encontrar um vetor $x \in K$ tal que $(u - x)^T G(x) \geq 0$, para todo $u \in K$.

Teorema 2.7.1 (Equivalência entre o problema de complementaridade e o problema de desigualdade variacional)

O problema de complementaridade é equivalente ao problema de desigualdade variacional.

Prova

Como mostrado em 2.2, as restrições da demanda para o problema de complementaridade podem ser incorporadas à função

G de modo que temos $K = \mathbb{R}_+^n$. A demonstração que será apresentada a seguir encontra-se em Karamardian [15].

Toda solução do problema de complementaridade é também solução do problema de desigualdade variacional, pois temos:

$x \geq 0$, $G(x) \geq 0$ e $x^T G(x) = 0$, logo $(u - x)^T G(x) \geq 0$, para todo $u \geq 0$.

Vamos verificar o contrário tomando:

$u = 0$ temos $x^T G(x) \leq 0$

$u = \lambda x$, com $\lambda > 1$, temos $x^T G(x) \geq 0$

logo $x^T G(x) = 0$. Para provar que $G(x) \geq 0$, basta observar que, como $x^T G(x) = 0$, temos:

$(u - x)^T G(x) \geq 0 \Rightarrow u^T G(x) \geq 0$ e do fato de $u \in K$, temos $G(x) \geq 0$ e a equivalência entre as formulações. ■

Teorema 2.7.2 (Condições para a existência de um problema de otimização equivalente)

Se $G(x)$ for integrável (ou seja, se existir uma função potencial $\varphi(x)$ tal que $G(x) = \nabla \varphi(x)$), então existe um problema de otimização equivalente.

Prova

Como $G(x) = \nabla \varphi(x)$, resolver o problema de desigualdade variacional acima é o mesmo que resolver:

$$(u - x)^T \nabla \varphi(x) \geq 0, \forall u \in K$$

E isto equivale às condições necessárias de 1ª ordem para mínimo local de φ . Ou seja é o mesmo que resolver:

$$\min_x \varphi(x) = \min \int_0^x G(r).dr$$

■

Este resultado será utilizado no capítulo seguinte.

Smith [39] apresenta o problema formulado como um sistema dinâmico com apenas dois períodos: *hoje* e *amanhã*. Aos condutores não é permitido trocar suas rotas *hoje*, mas podem fazê-lo *amanhã*, desde que obedeçam ao seguinte princípio:

Considere um condutor que trafegou ao menos uma vez *hoje*. Ele pode usar a mesma rota *amanhã*. Entretanto se ele troca a rota, então ele a troca por uma que *hoje* apresentou custo menor que aquela que ele utilizou.

Observe que este princípio não garante que o condutor trocará sua rota, nem afirma que existe uma rota de custo menor. Ele apenas afirma que o futuro é influenciado, mas não determinado pelo presente.

Nesta referência também são apresentados teoremas que garantem a existência, unicidade e estabilidade da solução.

Em Scaramucci [37], encontramos uma formulação em termos de equilíbrio econômico. Interpretando-se os custos como preços, c como a função demanda inversa e f como nível de operação de atividades temos a equivalência com um problema de equilíbrio econômico.

No capítulo seguinte apresentaremos com detalhes a formulação por otimização.

CAPÍTULO III

EQUILÍBRIO DE TRÁFEGO POR OTIMIZAÇÃO

3.1 - EQUIVALÊNCIA ENTRE UM PROBLEMA DE EQUILÍBRIO DE TRÁFEGO E UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Neste capítulo abordaremos o problema de equilíbrio de tráfego trabalhando como um problema de otimização.

Já mostramos no capítulo 2 a relação entre o problema de complementaridade não-linear e de desigualdade variacional. Vamos mostrar agora as condições de existência de um problema de otimização equivalente ao problema de tráfego.

O problema de equilíbrio de Wardrop formulado como um problema de complementaridade não-linear é escrito como:

$$G(x) \geq 0 : x \geq 0$$

$$\text{onde } G(x) = \begin{bmatrix} c_j^i - u_i \\ \sum_j F_j^i - d_i \end{bmatrix} \quad \text{e } x = \begin{bmatrix} F_j^i \\ u_i \end{bmatrix}$$

Colocando na forma de um problema de desigualdade variacional (pelo teorema 2.7.1):

$$(u - x)^T G(x) \geq 0, \quad \forall u \geq 0$$

$$\text{onde } G(x) = \begin{bmatrix} C_j^i - u_i \\ \sum_j F_j^i - d_i \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} F_j^i \\ u_i \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} \hat{F}_j^i \\ \hat{u}_i \end{bmatrix}$$

sujeito à restrição de não-negatividade dos fluxos.

Vamos nos concentrar inicialmente no subproblema de desigualdade variacional obtido da parte inferior de $G(x)$:

$$(\hat{u}_i - u_i)^T \left(\sum_j F_j^i - d_i \right) \geq 0$$

Como visto na proposição 2.2.1, a restrição da demanda é verificada para o problema de complementaridade e, como este é equivalente ao problema de desigualdade variacional temos que neste também a restrição da demanda será verificada. Portanto podemos escrever o problema de desigualdade variacional acima como:

$$(\hat{F}_j^i - F_j^i)^T (C_j^i - u_i) \geq 0$$

sujeito às restrições da demanda e da não-negatividade dos fluxos.

Teorema 3.1.1 (Equivalência entre o problema de equilíbrio de tráfego e o problema de otimização)

Se a matriz jacobiana dos custos nos arcos, $[dc/df]$ for simétrica, existe um problema de otimização equivalente ao equilíbrio de tráfego.

Prova

Utilizando o resultado obtido pelo teorema 2.7.2,

considerando as observações feitas acima e tomando a integral de linha de $G(x)$ em relação a x , temos:⁴

$$\int dF_j^T (C_j^i - u_i) = \int \sum_i \sum_j dF_j^i (C_j^i - u_i) = \int \left(\sum_i \sum_j dF_j^i C_j^i - \sum_i \sum_j dF_j^i u_i \right)$$

Observe que o caminho de integração se dá entre pontos factíveis, satisfazendo a restrição da demanda; assim o termo $\sum_j dF_j^i = 0$. Portanto, a expressão acima se reduz a:

$$\int \sum_i \sum_j dF_j^i \left(\sum_k \delta_{kj}^i c_k \right) = \int \sum_k c_k \sum_i \sum_j \delta_{kj}^i dF_j^i$$

$$\text{já que } C_j^i = \sum_k \delta_{kj}^i c_k$$

$$\text{mas } f_k = \sum_i \sum_j \delta_{kj}^i F_j^i, \text{ temos então:}$$

$$\int \sum_k c_k \sum_i \sum_j \delta_{kj}^i dF_j^i = \int \sum_k c_k df_k = \int c \cdot df$$

Como $[dc/df]$ é simétrica, existe $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ tal que $c = \nabla \varphi$, logo c é integrável, ou seja:

$$\int c \cdot df = \varphi(f)$$

Portanto existe uma formulação equivalente ao equilíbrio wardropiano que pode ser escrito como:

$$\min_f \varphi(f)$$

$$\text{onde } c = \nabla \varphi(f)$$

⁴ Por simplicidade de notação, estamos omitindo os limites de integração. Devemos ressaltar que esta é uma integral de linha entre a origem e um ponto F no espaço \mathbb{R}^n que se deseja determinar.

3.2 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Quando o problema não apresenta jacobiano simétrico existe uma formulação alternativa para resolver o problema.

O método consiste em linearizar os custos nos arcos usando expansão em série de Taylor, avaliando na solução anterior. Os \tilde{c}_k 's serão então:

$$\tilde{c}_k^{n+1} = c_k(f^n) + \frac{\partial c_k}{\partial f_k}(f^n) (f_k - f_k^n)$$

Neste caso estamos usando o método de Jacobi linearizado para fazer a linearização.

Os termos dependente e independente denotados por r e s, respectivamente serão:

$$s_k = c_k(f^n) - \frac{\partial c_k}{\partial f_k}(f^n) f_k^n$$

$$r_k = \frac{\partial c_k}{\partial f_k}$$

Agora fazemos $\int (s + rf).df$ e obtemos

$$\sum_k s_k f_k + \frac{1}{2} r_k f_k^2$$

Formulamos o problema da seguinte maneira:

$$\text{Min } \sum_k s_k f_k + \frac{1}{2} r_k f_k^2$$

s.a.

$$f_k - \sum_i \sum_j \delta_{kj}^i F_j^i = 0$$

$$\sum_j F_j^i = d_i$$

$$F_j^i \geq 0$$

A primeira restrição nos garante que o fluxo em cada arco será a soma dos fluxos nos caminhos que passam por ele. A segunda restrição assegura que a soma dos fluxos nos caminhos entre quaisquer pares O-D será igual a demanda para aquele par O-D. E finalmente a última restrição exige que os fluxos nos caminhos sejam não-negativos e obviamente os fluxos nos arcos também serão não-negativos pois são a soma dos fluxos nos caminhos.

O teorema que garante a convergência da sequência gerada pelo método de Jacobi encontra-se no apêndice C.

3.3 – O ALGORITMO

1: – Inicialização

$n = 0$, estipular f^0

2: – Nova iteração

$\bar{f} = f^n$

3: – Linearização

$$\tilde{c}_k(\bar{f}) = c_k(\bar{f}) + \frac{\partial c_k}{\partial f_k}(\bar{f})(f_k - \bar{f}_k)$$

$$r_k = c_k(\bar{f}) - \frac{\partial c_k}{\partial f_k}(\bar{f})\bar{f}_k$$

$$s_k = \frac{\partial c_k}{\partial f_k}$$

4: - Resolução do problema

Encontrar f que resolve:

$$\min \sum s_k f_k + \frac{1}{2} r_k f_k^2$$

s.a.

$$f_k - \sum_i \sum_j \delta_{kj}^i F_j^i = 0$$

$$\sum_j F_j^i = d_i$$

$$F_j^i \geq 0$$

5: - Teste de parada

Se $|f_k - f_k^n| < \epsilon$ (para ϵ pequeno), então f é solução aproximada para o problema.

Caso contrário, $n = n + 1$, $f^n = f$ e retorna ao passo 2

3.4 - ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Para a resolução deste problema, usamos Minos 5.0, um pacote computacional desenvolvido pelo Laboratório de Otimização de Sistemas (SOL) de Stanford.

O pacote resolve problemas de maximização, minimização,

lineares ou não, com restrições lineares e não-lineares ou ainda sem restrições.

Os dados de entrada são fornecidos através de um arquivo de dados específico, sendo que apenas os elementos não-nulos da matriz das restrições e do vetor b são passados para o programa. A cada iteração é possível alterar os dados de entrada.

É necessário construir subrotinas que avaliem a função objetivo e seu gradiente (no caso desta ser não-linear) e o jacobiano das restrições (quando estas forem não-lineares). Se o gradiente não for dado, o programa pode estimar suas componentes usando diferenças finitas. Porém, isto pode causar um acréscimo do tempo de execução do programa e há pouca segurança que uma solução aceitável seja encontrada. Ressaltamos que em nossos testes o gradiente foi fornecido analiticamente.

O pacote constrói subproblemas linearizando a função a cada iteração usando expansão em série de Taylor de primeira ordem em torno da solução do subproblema anterior. É utilizado o algoritmo do gradiente-reduzido combinado com um algoritmo quase-Newton para minimizar a função. Este algoritmo encontra-se detalhado em Murtagh e Saunders [25].

Para a fatoração da base B é utilizada a eliminação gaussiana, computando uma fatoração LU da forma:

$$LB = U$$

onde L é triangular inferior, apresentando a diagonal composta de 1 e PUQ é triangular superior para algumas matrizes de permutações P e Q .

Existem circunstâncias nas quais o programa pode parar a execução. As mais freqüentes são:

- solução ótima encontrada;
- problema infactível;
- problema ilimitado;
- gradiente da função objetivo parece incorreto;
- jacobiano das restrições parece incorreto;
- base singular;
- erro nos dados de entrada.

Ressaltamos que em todos os testes realizados, o programa encontrou a solução ótima.

O programa está implementado em linguagem de programação Fortran 77 e os testes foram realizados em ambiente VAX/VMS versão 4.5.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS COMPUTACIONAIS

4.1 – TESTES COMPUTACIONAIS

Neste capítulo apresentaremos alguns testes que foram feitos usando ambos os métodos: complementaridade e otimização.

Vamos apresentar a solução em termos de fluxo nos caminhos e nos arcos, visto que o fluxo nos caminhos nos dá a idéia de equilíbrio, mas não é único. Temos garantia (pelo teorema 2.3.3) que o fluxo nos arcos é único, podendo haver várias combinações diferentes de fluxos nos caminhos resultando no mesmo conjunto de fluxos nos arcos.

Exemplo 4.1.1

Este exemplo encontra-se em Dafermos [5] e nos apresenta as funções custo nos arcos dependendo também do fluxo nos demais arcos da rede. Consideremos a rede representada na Figura 4.1.1, a qual contém duas ruas de mão dupla e uma de mão única conectando os nós 1 e 2.

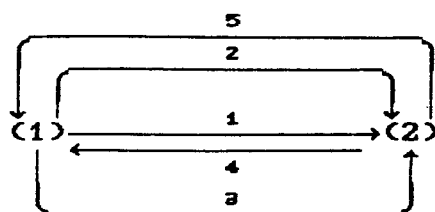


Figura 4.1.1

As funções custo nos arcos são definidas por:

$$c_1 = 4f_1^2 + 2f_1f_4 + 900f_1$$

$$c_2 = 6f_2^2 + 3f_2f_5 + 820f_2$$

$$c_3 = 5f_3^2 + 1220f_3$$

$$c_4 = 6f_4^2 + 2f_4f_1 + 900f_4$$

$$c_5 = 8f_5^2 + 3f_5f_2 + 820f_5$$

Consideremos dois pares O-D:

(1,2) com demanda igual a 120 e

(2,1) também com demanda igual a 120.

Neste exemplo, os arcos coincidem com os caminhos. Ao resolvermos por complementaridade, fizemos uso de sete variáveis, às quais correspondem:

$x_1 - x_3$: os caminhos (ou arcos) para o primeiro par O-D.

x_4, x_5 : os caminhos (ou arcos) para o segundo par O-D.

x_6, x_7 : respectivamente o custo mínimo para o primeiro e segundo par O-D.

Quando usamos o método de otimização, as variáveis foram assim definidas:

$x_1 - x_5$: respectivamente os fluxos nos 5 arcos da rede.

$x_6 - x_9$: respectivamente os fluxos nos 3 caminhos para o primeiro par O-D.

x_9, x_{10} : os fluxos nos 2 caminhos para o segundo par O-D.

A solução para este problema usando complementaridade foi obtida em 3 iterações com tempo de CPU igual a 0.46 segundos. A mesma solução foi obtida pelo método de otimização em 5 iterações, com o tempo de CPU de 2.45 segundos e com exatidão de 10^{-3} . Esta solução é como segue:

$$f_1 = F_1^1 = 42.6737$$

$$f_2 = F_2^1 = 40.9964$$

$$f_3 = F_3^1 = 36.3298$$

$$f_4 = F_1^2 = 61.2919$$

$$f_5 = F_2^2 = 58.7080$$

O custo mínimo para o primeiro par O-D é de 50921.69 e, para o segundo par O-D, 82934.11.

Exemplo 4.1.2

Este exemplo foi adaptado de Nagurney [27], a rede correspondente está representada na Figura 4.1.2.

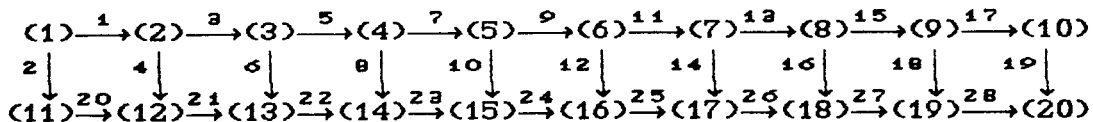


Figura 4.1.2

A função custo nos arcos é definida como:

$$c_k(f) = \alpha_k f_k^4 + \beta_k$$

Vamos considerar um par O-D:

(1,20) com demanda igual a 100.

Resolvendo-se este problema por complementaridade (que trabalha com caminhos), fizemos uso de 11 variáveis às quais correspondem:

$x_1 - x_{10}$: os caminhos possíveis para este par O-D.

x_{11} : custo mínimo para este par.

A matriz 4.1.2a representa a matriz de incidência arco-caminho para esta rede com relação a este par O-D.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
5	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
7	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
9	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
11	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
13	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
15	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
17	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
19	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
21	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
22	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
23	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
24	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
25	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
26	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
27	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
28	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Matriz 4.1.2a

Como já havíamos dito na definição de matriz de incidência arco-caminho, a componente (k,j) igual a 1 indica que o arco k está no caminho j e quando esta componente é zero temos que este arco não pertence ao caminho j .

Ao resolvermos por otimização fizemos uso de 38 variáveis à quais correspondem:

$x_1 - x_{28}$: respectivamente os fluxos nos 28 arcos da rede.

$x_{29} - x_{38}$: os fluxos nos 10 caminhos para este par O-D.

A solução para este problema usando complementaridade foi obtida em 5 iterações com tempo de CPU igual a 1.11 segundos. O método de otimização encontrou a solução usando 6 iterações com tempo de CPU de 6.64 segundos e com exatidão de 10^{-2} .

Em termos de fluxos nos caminhos a solução é como segue:

$$F_1^1 = 21.4078$$

$$F_2^1 = 28.4839$$

$$F_3^1 = F_4^1 = 0.$$

$$F_5^1 = 3.5741$$

$$F_6^1 = 0.$$

$$F_7^1 = 1.8148$$

$$F_8^1 = F_9^1 = 0.$$

$$F_{10}^1 = 44.7192$$

O custo mínimo é de 3792.34

Esta solução nos dá o seguinte conjunto de fluxo nos arcos.

$$f_1 = 55.2808$$

$$f_2 = 44.7192$$

$$f_3 = 55.2808$$

$$f_4 = 0.$$

$$f_5 = 55.2808$$

$$f_6 = 0.$$

$$f_7 = 53.4660$$

$$f_8 = 1.8148$$

$$f_9 = 53.4660$$

$$f_{10} = 0.$$

$$f_{11} = 49.8919$$

$f_{12} = 3.5741$
 $f_{13} = 49.8919$
 $f_{14} = 0.$
 $f_{15} = 49.8919$
 $f_{16} = 0.$
 $f_{17} = 21.4078$
 $f_{18} = 28.4839$
 $f_{19} = 21.4078$
 $f_{20} = 44.7192$
 $f_{21} = 44.7192$
 $f_{22} = 44.7192$
 $f_{23} = 46.5341$
 $f_{24} = 46.5341$
 $f_{25} = 50.1082$
 $f_{26} = 50.1082$
 $f_{27} = 50.1082$
 $f_{28} = 78.5922$

Exemplo 4.1.3

Este exemplo é o mesmo que o exemplo 4.1.2, mas agora com dois pares O-D. Estamos apresentando novamente a rede na Figura 4.1.3.

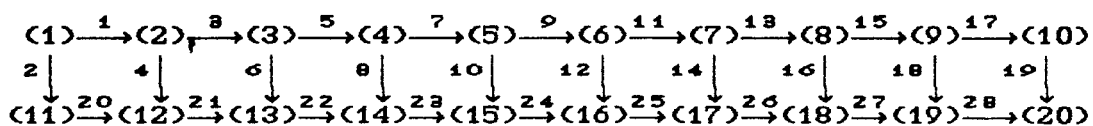


Figura 4.1.3

A função custo é tal qual a do exemplo 4.1.2.

Os dois pares O-D são:

(1,20) com demanda igual a 100 e

(1,15) também com demanda igual a 100.

Na formulação por complementaridade fizemos uso de 17 variáveis às quais correspondem:

$x_1 - x_{10}$: os caminhos possíveis para o primeiro par O-D.

$x_{11} - x_{15}$: os caminhos possíveis para o segundo par O-D.

x_{16}, x_{17} : respectivamente o custo mínimo para o primeiro e segundo par O-D.

A matriz de incidência arco-caminho para o primeiro par O-D é tal qual a matriz 4.1.2a do exemplo 4.1.2 e a matriz 4.1.3a representa a matriz de incidência arco-caminho para o segundo par O-D.

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	0
2	0	0	0	0	1
3	1	1	1	0	0
4	0	0	0	1	0
5	1	1	0	0	0
6	0	0	1	0	0
7	1	0	0	0	0
8	0	1	0	0	0
9	0	0	0	0	0
10	1	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	1
21	0	0	0	1	1
22	0	0	1	1	1
23	0	1	1	1	1
24	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0

Matriz 4.1.3a

Quando trabalhamos com otimização fizemos uso de 43 variáveis às quais correspondem:

$x_1 - x_{28}$: respectivamente os fluxos nos 28 arcos da rede.

$x_{29} - x_{38}$: os fluxos nos 10 caminhos para o primeiro par O-D.

$x_{39} - x_{43}$: os fluxos nos 5 caminhos para o segundo par O-D.

A solução usando complementaridade foi obtida em 5

iterações com tempo de CPU de 2.11 segundos. O método de otimização encontrou esta solução em 6 iterações com tempo de CPU de 7.76 segundos e com exatidão de no mínimo 10^{-2} . A solução, em termos de fluxo nos caminhos é como segue.

$$F_1^1 = 21.4118$$

$$F_2^1 = 28.4816$$

$$F_3^1 = F_4^1 = 0.$$

$$F_5^1 = 21.2723$$

$$F_6^1 = 0.$$

$$F_7^1 = 12.3138$$

$$F_8^1 = F_9^1 = 0.$$

$$F_{10}^1 = 16.5205$$

$$F_1^2 = 26.3778$$

$$F_2^2 = F_3^2 = F_4^2 = 0.$$

$$F_5^2 = 73.6222$$

O custo mínimo para o primeiro par O-D é 21313.32 e, para o segundo par O-D, 19565.11.

Esta solução corresponde à seguinte solução em termos de fluxo nos arcos:

$$f_1 = 109.8573$$

$$f_2 = 90.1427$$

$$f_3 = 109.8573$$

$$f_4 = 0.$$

$$f_5 = 109.8573$$

$$f_6 = 0.$$

$$f_7 = 97.5435$$

$f_8 = 12.3137$
 $f_9 = 71.1657$
 $f_{10} = 26.3778$
 $f_{11} = 49.8934$
 $f_{12} = 21.2728$
 $f_{13} = 49.8919$
 $f_{14} = 0.$
 $f_{15} = 49.8934$
 $f_{16} = 0.$
 $f_{17} = 21.4118$
 $f_{18} = 28.4816$
 $f_{19} = 21.4118$
 $f_{20} = 90.1427$
 $f_{21} = 90.1427$
 $f_{22} = 90.1427$
 $f_{23} = 102.4565$
 $f_{24} = 28.8343$
 $f_{25} = 50.1065$
 $f_{26} = 50.1065$
 $f_{27} = 50.1065$
 $f_{28} = 78.5881$

Exemplo 4.1.4

Este exemplo é outra adaptação de Nagurney [27] e a rede é novamente a do exemplo 4.1.2. Vamos exibi-la mais uma vez na Figura 4.1.4.

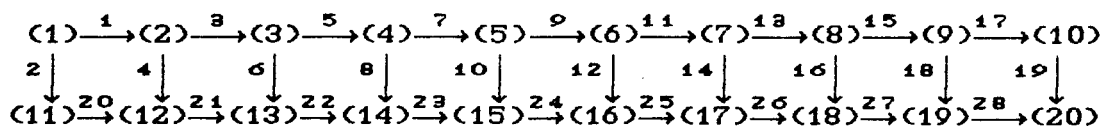


Figura 4.1.4

A diferença deste exemplo para os dois anteriores é que

este apresenta as funções custo nos arcos dependendo do fluxo nos demais arcos da rede.

A função custo tem a seguinte estrutura:

$$c_k(f) = \alpha_k f_k^4 + \gamma f_k + \lambda f_j + \beta_k$$

Temos para este exemplo três pares O-D:

(1,20) com demanda igual a 50;

(1,19) com demanda igual a 60 e

(2,17) com demanda igual a 100.

Na formulação por complementaridade fizemos uso de 28 variáveis às quais correspondem:

$x_1 - x_{10}$: os caminhos possíveis para o primeiro par O-D.

$x_{11} - x_{19}$: os caminhos possíveis para o segundo par O-D.

$x_{20} - x_{25}$: os caminhos possíveis para o terceiro par O-D.

x_{26} , x_{27} , x_{28} : respectivamente o custo mínimo para o primeiro, segundo e terceiro par O-D.

A matriz de incidência arco-caminho para o primeiro par O-D é tal qual a matriz 4.1.2a do exemplo 4.1.2. Para o segundo e terceiro par O-D temos as matrizes 4.1.4a e 4.1.4b.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	1
3	1	1	1	1	1	1	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	1	0
5	1	1	1	1	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	0	0
7	1	1	1	1	1	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	1	0	0	0
9	1	1	1	1	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	1	0	0	0	0
11	1	1	1	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	1	0	0	0	0	0
13	1	1	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	1	0	0	0	0	0	0
15	1	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	1	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	1	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	1
21	0	0	0	0	0	0	0	1	1
22	0	0	0	0	0	0	1	1	1
23	0	0	0	0	0	1	1	1	1
24	0	0	0	0	1	1	1	1	1
25	0	0	0	1	1	1	1	1	1
26	0	0	1	1	1	1	1	1	1
27	0	1	1	1	1	1	1	1	1
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Matriz 4.1.4a

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	1	0
4	0	0	0	0	0	1
5	1	1	1	1	0	0
6	0	0	0	0	1	0
7	1	1	1	0	0	0
8	0	0	0	1	0	0
9	1	1	0	0	0	0
10	0	0	1	0	0	0
11	1	0	0	0	0	0
12	0	1	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0
14	1	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	1
22	0	0	0	0	1	1
23	0	0	0	1	1	1
24	0	0	1	1	1	1
25	0	1	1	1	1	1
26	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0

Matriz 4.1.4b

Na resolução por otimização usamos 53 variáveis às quais correspondem:

$x_1 - x_{28}$: os fluxos nos 28 arcos da rede.

$x_{29} - x_{38}$: os fluxos nos 10 caminhos para o primeiro par O-D.

$x_{39} - x_{47}$: os fluxos nos 9 caminhos para o segundo par O-D.

$x_{48} - x_{53}$: os fluxos nos 6 caminhos para o terceiro par

O-D.

A solução usando complementaridade foi obtida em 8 iterações com tempo de CPU de 4.7 segundos. O método de otimização encontrou a solução em 9 iterações com tempo de CPU de 15.23 segundos e com exatidão de 10^{-2} .

Esta solução em termos de fluxo nos caminhos é:

$$F_1^1 = 15.7302$$

$$F_2^1 = 34.2699$$

$$F_3^1 = F_4^1 = F_5^1 = F_6^1 = F_7^1 = F_8^1 = F_9^1 = F_{10}^1 = 0.$$

$$F_1^2 = 2.3067$$

$$F_2^2 = F_3^2 = F_4^2 = F_5^2 = F_6^2 = F_7^2 = F_8^2 = 0.$$

$$F_9^2 = 57.6933$$

$$F_1^3 = 48.9887$$

$$F_2^3 = F_3^3 = F_4^3 = 0.$$

$$F_5^3 = 8.9902$$

$$F_6^3 = 42.0210$$

O custo mínimo para o primeiro par O-D é 30830.29, para o segundo par O-D, 29725.94 e para o terceiro, 25810.21.

Esta solução corresponde à seguinte solução em termos de fluxo nos arcos:

$$f_1 = 52.3067$$

$$f_2 = 57.6933$$

$$f_3 = 110.2857$$

$$f_4 = 42.0210$$

$$f_5 = 101.2955$$

$$f_6 = 8.990$$

$f_7 = 101.2955$
 $f_8 = 0.$
 $f_9 = 101.2955$
 $f_{10} = 0.$
 $f_{11} = 101.2955$
 $f_{12} = 0.$
 $f_{13} = 52.3067$
 $f_{14} = 48.9887$
 $f_{15} = 52.3067$
 $f_{16} = 0.$
 $f_{17} = 15.7301$
 $f_{18} = 36.6307$
 $f_{19} = 15.7307$
 $f_{20} = 57.6933$
 $f_{21} = 99.7143$
 $f_{22} = 108.7045$
 $f_{23} = 108.7045$
 $f_{24} = 108.7045$
 $f_{25} = 108.7045$
 $f_{26} = 57.6933$
 $f_{27} = 57.6933$
 $f_{28} = 34.2699$

Podemos observar que o tempo de CPU para os testes realizados usando otimização é significativamente maior comparando ao tempo usando complementaridade. Isto se deve em parte ao fato que, ao usarmos otimização, o pacote utilizado lê os dados de entrada a cada iteração, e não nos foi possível impedir este fato. Isto consome um bom tempo. Conseguimos, outrossim, que a solução somente seja escrita no arquivo de saída se o usuário assim o desejar. Outro fato que pode ter

contribuído para um aumento no tempo é que quando o problema é linear e usamos otimização, estamos tornando este problema não-linear ao fazermos a integração. Outro fato que também concorre para que o tempo de CPU aumente é que o número de variáveis usando otimização é maior que o número de variáveis usando complementaridade. Isto faz com que as iterações do método de otimização, ainda em menor número, sejam mais longas.

CAPÍTULO V

EXTENSÕES E CONCLUSÕES

5.1 – O PARADOXO DE BRAESS

Numa rede de tráfego não sujeita a congestionamento onde o custo de viagem nos arcos não varia com o fluxo de veículos, a adição de um arco poderá ser de algum benefício para os condutores, (portanto, deve apenas ser observado se este benefício é capaz ou não de cobrir o custo de construção). E quando o arco adicional não providencia benefícios, nenhum condutor deve ser prejudicado. Parece óbvio que a mesma coisa será verdade quando a rede estiver sujeita a congestionamento. O exemplo de Braess (que se encontra em Murchland [23]) mostra que isto pode não ocorrer; pelo contrário, algum condutor pode ser significativamente prejudicado.

A Figura 2 mostra a rede para o exemplo de Braess. Ela possui demanda fixa, um par origem-destino e apenas quatro arcos, sendo que um quinto é adicionado posteriormente.

O custo de viagem é como segue:

$$c_1 = 10f_1$$

$$c_2 = 50 + f_2$$

$$c_3 = 50 + f_3$$

$$c_4 = 10f_4$$

O fluxo do nó origem 1 para o nó destino 4 é de 6 unidades.

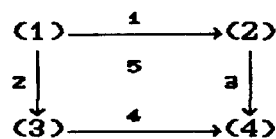


Figura 2

A solução encontrada foi:

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 3 \text{ unidades}$$

Ou seja 3 unidades em cada uma das rotas:

(1, 3) e (2, 4)

O custo em cada rota é de 83.

Agora adicionamos o arco 5 com custo da forma:

$$c_5 = 10 + f_5$$

Vejamos o que acontece:

Um condutor que trafega na rota:

(1, 3), pode observar que se tomar a rota:

(1, 5, 4), seu custo será:

$10 * 3 + 10 + 1 + 10 * 4 = 81$, um custo menor que o da rota anterior.

Porém, um condutor que tomava a rota:

(2, 4), foi prejudicado coma mudança da rota do

companheiro. Seu custo passa a ser:

$50 + 3 + 10 * 4 = 93$. Ele então muda de rota e também segue a rota:

(1, 5, 4). Seu novo custo é:

$10 * 4 + 10 + 2 + 10 * 4 = 92$. Lembramos que o custo antes da adição do arco 5 era de 83.

Podemos observar que o custo em todas as rotas é 92, logo, nenhum condutor tem incentivo para mudar de rota: estamos numa situação de equilíbrio de Wardrop. Observamos aqui que o acréscimo de um arco não foi capaz de providenciar benefício algum, pelo contrário, fez o custo dos usuários aumentar em 11%.

O que aconteceu foi que os condutores comportaram-se muito bem individualmente, mas não foram capazes de providenciar uma solução ótima coletiva: ocorre uma "falha de mercado".

Podemos indagar sobre uma explicação para o paradoxo. De fato, desde que o fenômeno é genuíno, nenhuma explicação pode ser dada: ele simplesmente ocorre⁵. Pode-se recorrer à teoria

⁵ Poderíamos pensar que estes casos são fictícios, mas uma experiência em Stuttgart mostrou que o paradoxo pode ocorrer na realidade, quando grandes investimentos no centro da cidade não foram capazes de criar os benefícios esperados. Estes só foram alcançados quando uma rua transversal foi retirada do uso do tráfego (Murchland [23]).

de jogos de soma não-zero para uma interpretação⁶. O dilema do prisioneiro é um problema clássico deste grupo de problemas. Suponha que Darcy e Darli estão sendo acusados do assassinato da rua Cuba⁷. A polícia, como sempre, é incapaz de provar este crime, a menos que consiga uma confissão. Mas a polícia pode fazer propostas para que esta confissão ocorra. Os dois acusados são interrogados em salas separadas e são confrontados com alternativas específicas.

Se Darcy e Darli não confessam, ambos pegam apenas um ano de prisão por um crime ecológico: eles cortaram uma seringueira (a árvore) em Xapuri no Acre. Se Darli confessa e Darcy não o faz, o segundo recebe uma sentença de dez anos, enquanto o primeiro sai livre. O mesmo acontece com o caso recíproco. Se ambos confessam, ambos pegam uma pena de seis anos. Na forma de jogos bi-matriciais, com o tempo de Darli na cadeia sendo relacionado primeiro, os resultados são como segue:

⁶ A propósito, o algoritmo de Lemke, foi inicialmente proposto para calcular pontos de equilíbrio em jogos bi-matriciais, (Lemke e Howson [19])

⁷ Os personagens, fatos e ocasiões são pura ficção. Qualquer semelhança com fatos reais terá sido meramente proposital.

		Estratégias de Darcy	
		não confessa	confessa
Estratégias de Darli	não confessa	1,1	10,0
	confessa	0,10	6,6

Assumindo que Darli não gosta da prisão e que sua segurança a respeito da vingança de Darcy está garantida, o melhor para ele é confessar, não importando que decisão Darcy tome. A mesma lógica segue do ponto de vista de Darcy. Confessar é uma estratégia dominante para ambos os prisioneiros. Mas se eles agem desta maneira, ambos acabam pegando seis anos de prisão, em vez de um único ano se nenhum deles confessasse.

Como vimos mais uma vez, a melhor solução individual não foi a melhor solução coletiva.

5.2 – CONCLUSÕES FINAIS

Podemos extrair deste trabalho algumas conclusões. A primeira delas é que, como havíamos suposto inicialmente, é possível resolver o problema de equilíbrio de tráfego utilizando complementaridade. Não tínhamos notícia, até então de nenhum trabalho computacional utilizando tal método. Foi observado eficiência na resolução, pois poucas iterações foram

gastas para encontrar a solução.

Concluimos também que a formulação usando otimização comportou-se bem, apesar de utilizar mais iterações que o método de complementaridade. Como já havíamos dito anteriormente, o tempo de CPU (que foi muito expressivo) não pode ser considerado como tal devido às razões apresentadas no capítulo IV. O nosso objetivo inicial era apenas mostrar que é possível resolver o problema por otimização. Não houve preocupação com a eficiência.

Podemos colocar como pontos para futuros estudos, a implementação computacional de um algoritmo eficiente para resolver o problema usando otimização, visto que utilizamos um pacote geral. Esperamos que um programa específico para problemas quadráticos seja mais eficiente. Também podem ser feitos estudos e levantamentos para avaliar a construção de funções custo nos arcos (talvez testando sugestões feitas por autores), após o qual pode ser feita uma aplicação prática do modelo.

APÊNDICES

APÊNDICE A

O MÉTODO DE LEMKE

Vamos apresentar uma descrição do método de Lemke que foi extraída de Murty [26].

Considere o seguinte sistema:

$$w - Mz = q \quad (A.1)$$

onde w e z precisam satisfazer:

$$w \geq 0, z \geq 0 \quad (A.2) \quad (A)$$

$$w_j z_j = 0, \forall j \quad (A.3)$$

A restrição A.1 é conhecida como a restrição de complementaridade. Significa dizer que na solução, se uma variável do par (w_j, z_j) é positiva, a outra será necessariamente zero. Por isso o par (w_j, z_j) é conhecido como par de variáveis complementares e cada variável neste par é o complemento da outra.

Se o vetor q é não-negativo, temos a solução trivial:

$$w = q \text{ e } z = 0$$

Portanto vamos assumir que existe $q_i < 0$ para algum i .

Uma variável artificial z_0 é introduzida no sistema A.1 a

fim de proporcionar uma base factível para iniciar o algoritmo. Em forma de tablô, temos a seguinte representação:

w	z	z_0	
I	- M	- e_n	q

(A.d)

$$w \geq 0 \quad z \geq 0 \quad z_0 \geq 0$$

Em cada estágio, o algoritmo trabalha com uma base, a qual é uma submatriz quadrada não-singular de ordem n da matriz A.d.

A solução de A.d correspondente a uma dada base é obtida fazendo todas as variáveis não-básicas iguais a zero e então resolvendo o sistema restante para os valores das básicas. A base é uma base factível se os valores de todas as variáveis básicas são não-negativos. Devemos ressaltar que o algoritmo trabalha apenas com bases factíveis.

A variável z_0 foi introduzida em A.1 com o único objetivo de obter uma base factível para iniciar o algoritmo.

O vetor básico inicial satisfaz as seguintes propriedades:

(i) Há no máximo uma variável básica de cada par de variáveis complementares (w_j, z_j) ;

(ii) Ele contém exatamente uma variável básica de cada um dos $(n - 1)$ pares de variáveis complementares e ambas as variáveis do par complementar restante são não-básicas;

(iii) z_0 é uma variável básica nele.

Um vetor básico factível para A.d no qual há exatamente uma variável básica de cada par complementar (w_j, z_j) é conhecido como um vetor básico factível complementar. Um vetor básico satisfazendo as propriedades (i), (ii) e (iii) é conhecido como um vetor básico factível quase complementar. Todos os vetores básicos obtidos no algoritmo com a possível exceção do vetor básico final são vetores factíveis quase complementares. Em algum estágio do algoritmo, um vetor básico factível complementar é obtido: é o vetor básico final e o algoritmo termina.

A regra para prosseguir o algoritmo é colocar como variável de entrada a complementar daquela que deixou a base. Esta regra é conhecida como regra do pivotamento complementar.

Existe duas maneiras nas quais o algoritmo pode terminar:

(i) Em algum estágio do algoritmo, z_0 deixa o vetor básico e uma base factível complementar é obtida. A solução de A.d correspondente a esta base final é uma solução de (A).

(ii) Em algum estágio do algoritmo, a coluna pivô torna-se não-positiva e neste caso o algoritmo termina no que chamamos de "raio extremo". Quando isto acontece o algoritmo é incapaz de resolver o problema. É possível que (A) não tenha solução, mas se ele tem uma solução o algoritmo é incapaz de encontrá-la.

Quando M satisfaz algumas condições, pode ser provado que o raio extremo apenas ocorre quando (A) não tem solução. Estas condições serão dadas a seguir.

Definição A.1

Uma matriz M é copositiva se $y^T M y \geq 0$, para todo $y \geq 0$.

Definição A.2

Uma matriz M é copositiva mais se ela é copositiva e sempre que $y \geq 0$ satisfaz $y^T M y = 0$, temos $y^T (M + M^T) = 0$.

Teorema A.1 (Condições de M para o algoritmo)

Se M é uma matriz copositiva mais e o sistema de restrições A.1 e A.2 tem uma solução factível, então o problema de complementaridade linear (A) tem uma solução e o algoritmo termina com uma base factível complementar. Reciprocamente, quando M é uma matriz copositiva mais, se o algoritmo aplicado a (A) termina em raio extremo, então o sistema de restrições A.1 e A.2 é infactível.

A demonstração deste teorema se encontra na referência citada.

Para evitar degenerescência no algoritmo é aconselhável que se troque o teste da razão usual pelo teste lexicográfico que consiste em adicionar um ϵ (suficientemente pequeno) a cada componente do vetor q antes de fazer o teste da razão.

APÊNDICE B

A CONVERGÊNCIA DA SEQUÊNCIA DE $\{x^k\}$ PARA O MÉTODO DE NEWTON

Apresentaremos agora um teorema devido a Pang e Chan [33] que garante a convergência da sequência $\{x^k\}$ gerada pelo método de Newton. A demonstração se encontra na referência citada.

Teorema B.1 (Convergência de $\{x^k\}$)

Seja K um subconjunto fechado, convexo e não vazio de \mathbb{R}^n . Seja $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável com $\nabla G(x^k)$ sendo definido positivo. Então se x^0 está numa vizinhança de x^* , a sequência $\{x^k\}$ gerada pelo método de Newton é bem definida e converge para x^* . E mais, se ∇G é Lipschitz-contínua, então $\{x^k\}$ converge quadraticamente para x^* .

Nesta referência encontramos a citação de que este resultado de convergência foi anteriormente obtido por Eaves [8] e Josephy [14]. No tratamento de Eaves, ∇G não é assumido definido positivo, mas tem uma estrutura especial. De fato, G é dado por:

$$G(y,z) = \begin{bmatrix} c \\ h(z) \end{bmatrix}$$

onde ∇h é assumido definido positivo. A convergência é assumida apenas para as z-variáveis.

De qualquer modo, a suposição de positiva-definitude para o jacobiano parece ser muito forte. Mathiesen [22] afirma que em seus testes computacionais, os quais apresentam convergência global para os modelos de equilíbrio econômico walrasianos, parecem necessitar de um conjunto de hipóteses menos restritivo em relação ao apresentado no teorema.

APÊNDICE C

A CONVERGÊNCIA DA SEQUÊNCIA DE $\{x^k\}$ PARA O MÉTODO DE JACOBI LINEARIZADO

Vamos apresentar agora, mais um Teorema de Pang e Chan [33] que garante a convergência da sequência $\{x^k\}$ gerada pelo método de Jacobi linearizado. A demonstração se encontra na referência citada.

Teorema C.1 (Convergência de $\{x^k\}$)

Seja K um subconjunto fechado, convexo e não vazio de \mathbb{R}^n . Suponha $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável numa vizinhança de x^* e $\nabla G(x^*)$ tem diagonal positiva. Seja $\nabla G(x^*) = D(x^*) + B(x^*)$, onde $D(x^*)$ e $B(x^*)$ são, respectivamente as partes da diagonal e de fora da diagonal de $\nabla G(x^*)$. Se

$$\left\| D(x^*)^{-1/2} B(x^*) D(x^*)^{-1/2} \right\| < 1$$

então se x^0 está numa vizinhança de x^* , a sequência gerada pelo método de Jacobi é bem definida e converge para a solução x^* .

REFERÊNCIAS

- [1] Aashtiani, H. Z. e T. L. Magnanti, "Equilibria on a Congested Transportation Network", *SIAM J. Alg. Disc. Meth.* 2 (3) (1981) 213-226.
- [2] Ahn, Byong-Hun e William W.Hogan, "On Convergence of PIES Algorithm for Computing Equilibria", *Operations Research* 30 (2) (1982) 281-300.
- [3] Asmuth, R. L., "Traffic Network Equilibria" Tech. Rept. SOL 78-2, Systems Optimization Laboratory, Department of Operations Research, Stanford University, Stanford, CA (1978).
- [4] Beckmann, M., G. B. McGuire e C. B. Winsten, *Studies en the Economics of Transportation*, (Yale University Press, 1956).
- [5] Dafermos, Stella, "An Extended Traffic Assignment Model with Applications to Two-Way Traffic", *Transportation Science* 5 (1971) 366-389.
- [6] Dafermos, Stella, "Traffic Equilibrium and Variational Inequalities", *Transportation Science* 14 (1) (1980) 42-54.
- [7] Dafermos, Stella, "A Network Formulation Of Market Equilibrium Problems And Variational Inequalities", *Operations Research Letters*, 3 (5) (1984) 247-250.
- [8] Eaves, B. C., "A Locally Quadratically Convergent Algorithm for Computing Stationary Points", Tech. Rept., Department of Operations Research, Stanford University, Stanford, CA (1978).
- [9] Eaves, B. C. e R. Saigal, "Homotopies for the Computation of Fixed Points on Unbounded Regions", *Mathematical Programing* 3 (1972) 225-237.
- [10] Florian, Michael, "A Traffic Equilibrium Model of Travel by Car and Public Transit Modes", *Transportation Science* 11 (2) (1977) 166-179.

- [11] Friesz, Terry L., Roger L. Tobin, Tony E. Smith e Patrick T. Harker, "A Nonlinear Complementarity Formulation and Solution Procedure for the General derived Demand Network Equilibrium Problem", *Journal of Regional Science* 23 (3) (1983) 337-359.
- [12] Friesz, Terry L., Patrick T. Harker e Roger L. Tobin, "Alternative Algorithms for the general Network Spatial Price Equilibrium Problem", *Journal of Regional Science* 24 (4) (1984) 475-504.
- [13] Harker, Patrick T., "A Variational Inequality Approach for the Determination of Oligopolistic Market Equilibrium", *Mathematical Programming* 30 (1984) 105-111.
- [14] Josephy, N. H., "Newton's Method for Generalized Equations", Tech. Rept. 1965, Mathematics Research Center, University of Wisconsin, Madison, WI (1979).
- [15] Karamardian S., "The Nonlinear Complementarity Problem with Applications", *Journal of Optimization Theory and Application* 4 (2) (1969) 87-98.
- [16] Karamardian S., "Generalized Complementarity Problem", *Journal of Optimization Theory and Application* 8 (3) (1971) 161-168.
- [17] Leblanc, Larry J., Edward K. Morlok e Willian P. Pierskalla, "An Efficient Approach to Solving the Road Network Equilibrium Traffic Assignment Problem", *Transportation Research* 9 (1975) 309-318.
- [18] Lemke C. E., "Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming", *Management Science* 11 (7) (1965) 681-689.
- [19] Lemke C. E. e J. T. Howson, "Equilibrium Points of Bi-matrix Games", *SIAM J. Soc. Indust. Appl. Math.* 12 (2) (1964) 413-423.
- [20] Leventhal T., G. Nemhauser e L. Trotter Jr., "A column Generation Algorithm Traffic Assignment", *Transportation Science* 7 (1973) 168-176.
- [21] Mathiesen, Lars, "Computacional of Economic Equilibria by Sequence of Linear Complementarity Problems", *Mathematical Programming Study* 23 (1985) 1-25.
- [22] Mathiesen, Lars, "Computational Experience in Solving

Equilibrium Models by a Sequence of linear Complementarity Problems", *Operations Research* 33 (6) (1985) 1225-1250.

- [23] Murchland, J. D., "Braess's Paradox of Traffic Flow", *Transportation Research* 4 (1970) 391-394.
- [24] Murphy, Frederic H., Hanif D. Sherali e Allen L. Soyster, "A Mathematical Programming Approach for Determining Oligopolistic Market Equilibrium", *Mathematical Programming* 24 (1982) 92-106.
- [25] Murtagh, B. A. e M. A. Saunders, "Large-scale Linearly Constrained Optimization", *Mathematical Programming* 14 (1978) 41-72.
- [26] Murty, Katta G., *Linear and Combinatorial Programming*, (Wiley Nova York, N. Y., 1976).
- [27] Nagurney, Anna B., "Comparative Tests of Multimodal Traffic Equilibrium Methods", *Transportation Research* 18B (6) (1984) 469-485.
- [28] Netter, M., "Equilibrium and Marginal Cost Pricing on a Road Network with Several Traffic Flow Types", apresentado no 5^o Simpósio internacional de teoria de fluxo de tráfego e transportes, Berkeley (1971).
- [29] Nguyen, Sang e Clermont Dupuis, "An Efficient method for Computing Traffic Equilibria in Network with Asymmetric Transportation Cost" *Transportation Science* 18 (2) (1984) 185-202.
- [30] Nguyen, S. e S. Pallottino, "Equilibrium Traffic Assignment for Large Scale Transit Network", *European Journal of Operational Research* 37 (1988) 176-186.
- [31] Pacce, Lilian, Nelson P. Yamamamoto e Renata Rangel, "Terra rem Trânsito", *Folha de São Paulo* (11/06/86) d'20-d'29.
- [32] Pang, Jong-Shi, "An Equivalence Between Two Algorithms for Quadratic Programming", *Mathematical Programming* 20 (1981) 152-165.
- [33] Pang, J. S. e D. Chan, "Iterative Methods for Variational and Complementarity Problems", *Mathematical Programming* 24 (1982) 284-313.
- [34] Pang, Jong-Shi e Chang-Sung Yu, "Linearized Simplicial

Decomposition Methods for Computing Traffic Equilibria on Network", *Networks* 14 (1984) 427-438.

- [35] Rotondo, Wladimir, "Cálculo de Equilíbrios Econômicos por Complementaridade", Tese de Mestrado (Departamento de Matemática Aplicada, Universidade Estadual de Campinas, (dezembro de 1988).
- [36] Sacker, Richard S., "A decomposition Algorithm for Quadratic Programming", *Mathematical Programming* 18 (1980) 16-30.
- [37] Scaramucci, J. A., "Previsão de Tráfego como um Problema de Equilíbrio Econômico", XI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, (Ouro Preto, MG, 1988) 176-179.
- [38] Scaramucci, J. A. e W. Rotondo, "Treating Perfect and Imperfect Competition in Engineering-Economics Models", XI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, (Ouro Preto, MG, 1988) 180- 190.
- [39] Smith, M. J., "The Existence, Uniqueness and Stability of Traffic Equilibria", *Transportation Research* 13B (1979) 295-304.
- [40] Torres, Luis e Nelson Maculan, "Equilíbrio de Tráfego e Inequações Variacionais", X Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, (Gramado, RS, 1987) 972-977.
- [41] Wardrop, J. G., "Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research", *Proc. Inst. Civil Engineers, Part II* 1 (1952) 325-378.
- [42] Wohl, Martin e Brian V. Martin, *Traffic System Analysis for Engineers and Planners*, (McGraw-Hill, Nova York, N. Y., 1967).